Często popełniany błąd – dlaczego ze zbioru wartości funkcji należy wykluczyć 1 i -1 ?

Zadanie: Określ zbiór wartości funkcji:

$f(x) = \sin(x) \cdot ctg(x) - \cos(x) \cdot \mathrm{tg(x)}$

Zastosuje tu znane wzory: $tg(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ $i\ ctg(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$

Wtedy funkcja ma przepis:

$f(x) = \cos(x) - \sin(\mathrm{x})$

Różnicę zamienię na iloczyn, wykorzystam wzór:

$$\sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2 \cdot sin\frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \ cos\frac{\alpha + \beta}{2}$$

$\cos(x) - \sin(x) = \sin(90^o - x) - \sin(x) = 2 \cdot \cos(45^o) \cdot \sin(45^o - x)$

Wiec

$f(x) = \sqrt{2} \cdot \sin(45^o - x)$ $\qquad -1 \leq \sin(45^o - x) \leq 1$

Co daje $f(x) \in < -\sqrt{2}\,, +\sqrt{2} >$

Celowo nie uwzględniłem założeń dotyczącej dziedziny aby pokazać, że jest to bardzo częstym błędem.

W przepisie funkcji podanym na początku występuje ctg(x) i tg(x) funkcja ctg(x) nie istnieje dla $x = 0^o$ funkcja tg(x) nie istnije dla $x = 90^o$.

Jeżeli te wartości podstawimy do $f(x) = \sqrt{2} \cdot \sin(45^o - x)$ to

f(x=0)=1 i f(x=90)=-1 wiec wartości te należy wyłączyć ze zbioru wartości.

Prawidłowa odpowiedź to:

$$f(x) \in < -\sqrt{2}\,, -1) \vee (-1{,}1) \vee (1, +\sqrt{2} >$$