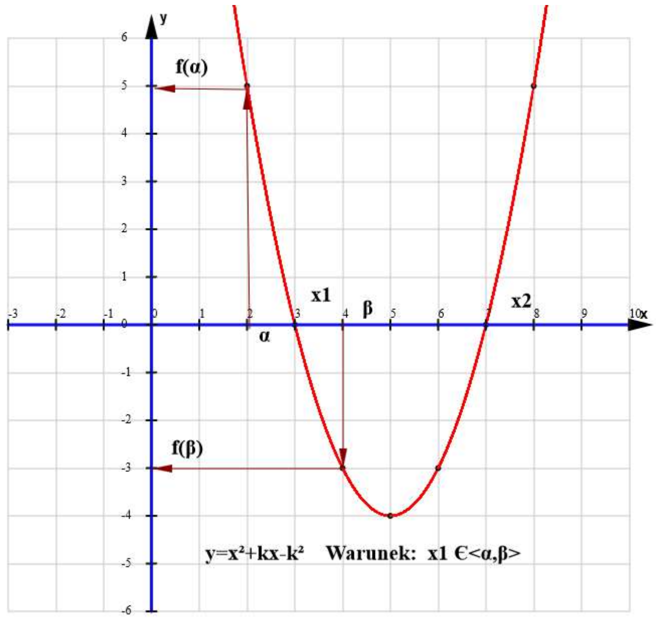
Równanie kwadratowe z parametrem i warunek: pierwiastek równania należy do zadanego przedziału.

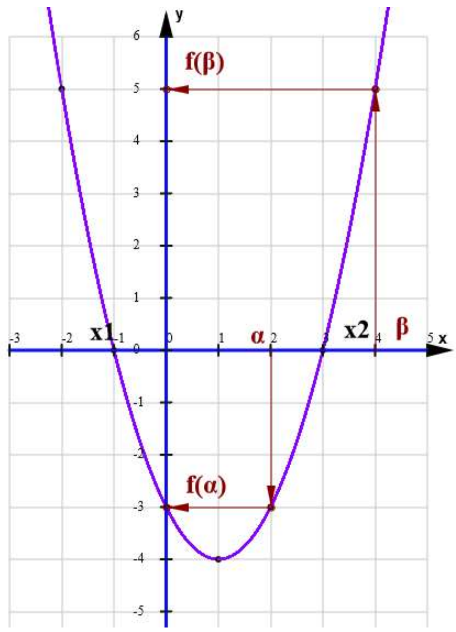
Dane jest równanie kwadratowe z parametrem „k”:

$$x^2 + k \cdot x - k^2 = 0$$

Oraz warunek że pierwiastek tego równania należy

do przedziału <2,4> tzn.:





$$2 \leq x_1 \leq 4 \ \vee \ 2 \leq x_2 \leq 4$$

Niech $\alpha = 2 \ i \ \beta = 4 \ wtedy$ otrzymamy warunki:

$$dla \ x_1 \Rightarrow f(\alpha) \geq 0 \wedge f(\beta) \leq 0 \wedge \ \ \Delta > \ 0$$

lub

$$dla \ x_2 \Rightarrow f(\alpha) \leq 0 \wedge f(\beta) \geq 0 \wedge \ \ \Delta > \ 0$$

$$\Delta = k^2 + 4 \cdot k^2 = 5 \cdot k^2 \Rightarrow \Delta > 0 \ dla \ k \in R$$

Sprawdzam warunki x_1:

$f(2) = 4 + 2 \cdot k - k^2 \qquad f(4) = 16 + 4 \cdot k - k\hat{}2$

$-k^2 + 2k + 4 \geq 0 \;\; \Delta = 4 + 16 = 20 \quad \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{5}$

$k_1 = \dfrac{-2 - 2\sqrt{5}}{-2} = 1 + \sqrt{5} \qquad k_2 = \dfrac{-2 + 2\sqrt{5}}{-2} = 1 - \sqrt{5}$

$$k \in < 1 - \sqrt{5}, 1 + \sqrt{5} >$$

$-k^2 + 4k + 16 \leq 0 \;\; \Delta = 16 + 64 = 80 \quad \sqrt{\Delta} = 4\sqrt{5}$

$k_1 = \dfrac{-4 - 4\sqrt{5}}{-2} = 2 + 2\sqrt{5} \qquad k_2 = \dfrac{-4 + 4\sqrt{5}}{-2} = 2 - 2\sqrt{5}$

$$k \in (\infty, 2 - 2\sqrt{5} > \vee (2 + 2\sqrt{5}, \infty)$$

Wniosek: x_1 *Nie spełnia warunków zadania*: $k \in \Phi$

Sprawdzam warunki x_2:

$f(2) = 4 + 2 \cdot k - k^2 \qquad f(4) = 16 + 4 \cdot k - k\hat{}2$

$-k^2 + 2k + 4 \leq 0 \;\; \Delta = 4 + 16 = 20 \quad \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{5}$

$k_1 = \dfrac{-2 - 2\sqrt{5}}{-2} = 1 + \sqrt{5} \qquad k_2 = \dfrac{-2 + 2\sqrt{5}}{-2} = 1 - \sqrt{5}$

$$k \in (-\infty, 1 - \sqrt{5} > \vee < 1 + \sqrt{5}, +\infty)$$

$-k^2 + 4k + 16 \geq 0 \;\; \Delta = 16 + 64 = 80 \quad \sqrt{\Delta} = 4\sqrt{5}$

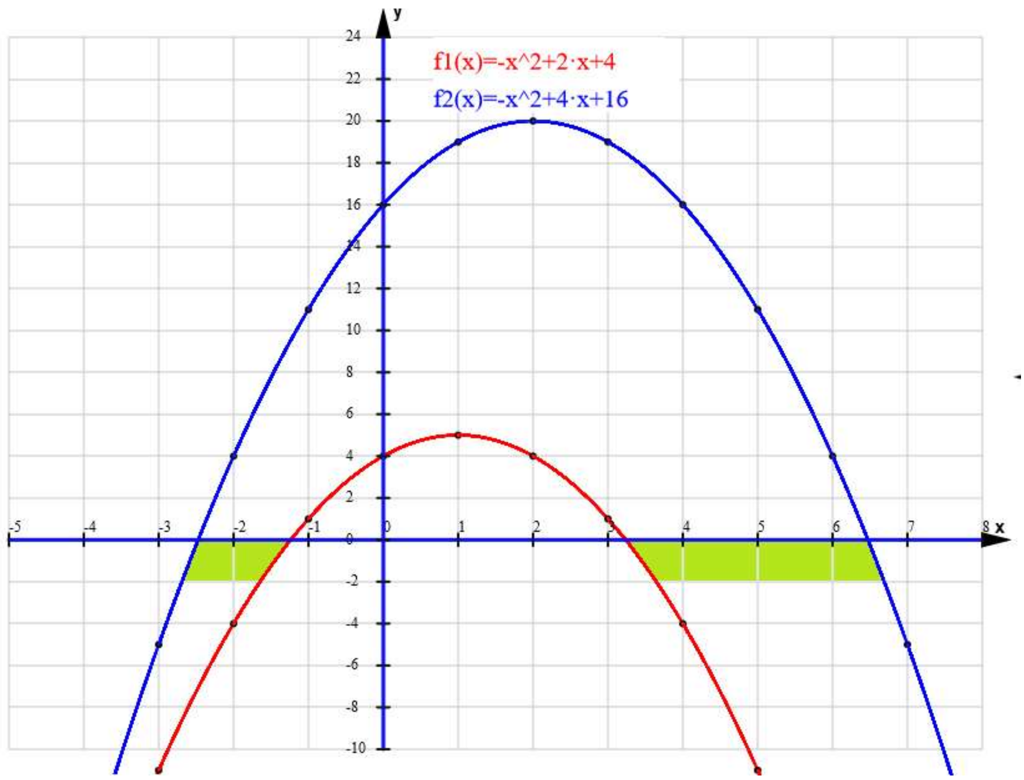
$k_1 = \dfrac{-4 - 4\sqrt{5}}{-2} = 2 + 2\sqrt{5} \qquad k_2 = \dfrac{-4 + 4\sqrt{5}}{-2} = 2 - 2\sqrt{5}$

$$k \in < 2 - 2\sqrt{5}, 2 + 2\sqrt{5} >$$

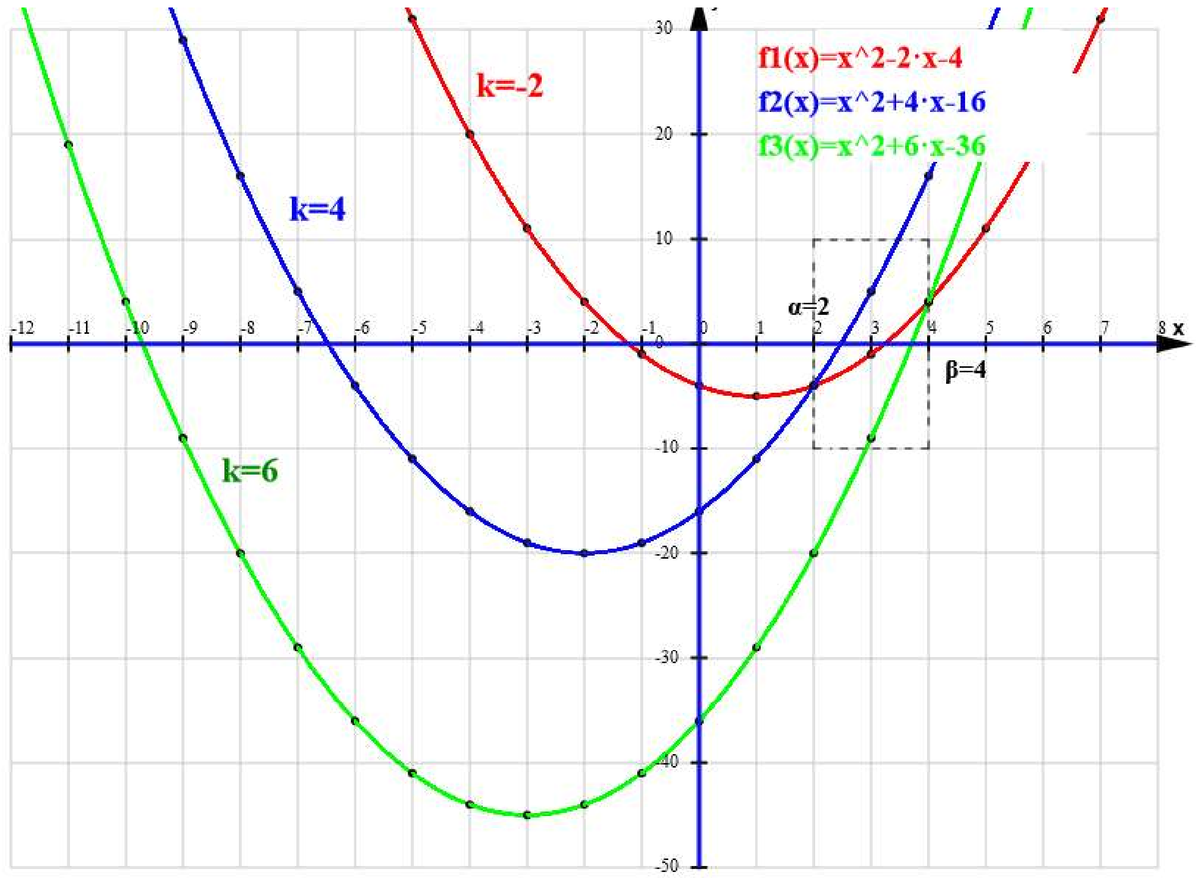
Wniosek: *Dla* x_2

$$k \in < 2 - 2\sqrt{5}, 1 - \sqrt{5} > \vee < 1 + \sqrt{5}, 2 + 2\sqrt{5} >$$

Interpretacja graficzna warunków dla x_2:



Sprawdzę dla: k=-2 dla k= 4 i dla k=6



Na zakończenie należy dodać, że jeżeli parametr występuje we współczynniku przy x^2 $tzn\ a = a(k)$ to należy oddzielnie rozpatrzeć warunek kiedy $a(k) > 0\ i\ odzielnie\ kiedy\ a(k) < 0$ oraz należy sprawdzić warunek gdy a(k)=0.

Aby nie sprawdzać dwóch warunków można zastosować iloczyn jak poniżej:

$$a(k) \cdot f(\alpha) \geq 0 \wedge a(k) \cdot f(\beta) \ \leq 0\ dla\ x_1$$

Lub

$$a(k) \cdot f(\alpha) \leq 0 \wedge a(k) \cdot f(\beta) \geq 0\ dla\ x_2$$

Jeżeli mamy warunki na $x_1\ lub\ x_2$ takie, że np. oba są dodatnie lub oba są ujemne należy wówczas zastosować wzory Viet'a .

Jeżeli jest powiedziane w zadaniu że oba pierwiastki należą do zadanego przedziału to należy warunki zmodyfikować jak poniżej:

$$a(k) * f(\alpha) \geq 0 \wedge a(k) \cdot f(\beta) \geq 0 \wedge\ a(k) \cdot f(\ \gamma) \leq 0$$

Gdzie: $\gamma = \frac{\alpha+\beta}{2}$

Te ostatnie warunki są raczej rzadko spotykane .

Zamiast sprawdzać połowę przedziału można sprawdzić rzędną wierzchołka paraboli.