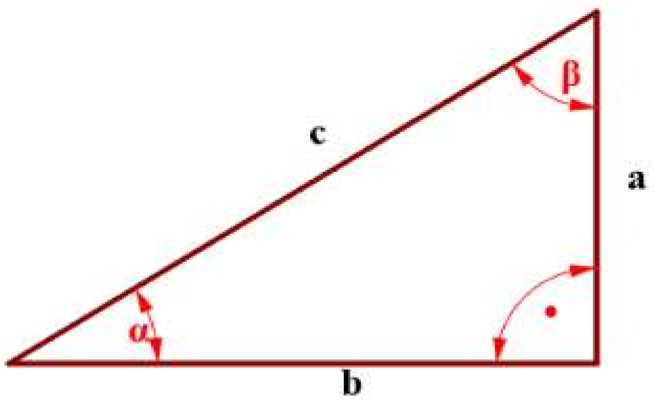
Związki pomiędzy funkcjami trygonometrycznymi:



1. Jedynka trygonometryczna to trygonometryczna postać twierdzenia Pitagorasa:
   $a^2 + b^2 = c^2$ dzieląc obie strony przez c^2 otrzymamy:
   $$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1 \Rightarrow \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
2. Funkcja kąta dopełniającego :
   $$sin\alpha = \frac{a}{c} \quad cos\beta = \frac{a}{c} \Rightarrow sin\alpha = cos\beta = \cos(90^o - \alpha)$$
   $$\sin(90^o - \alpha) = cos\alpha$$
   Funkcja kąta dopełniającego jest równa cofunkcji danego kąta.

3. Jak wyrazić $sin\alpha\ i \cos\alpha\ przez\ tg\alpha$
   $$\sin^2\alpha = \frac{\sin^2\alpha}{1} = \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha} = \frac{\mathrm{tg}^2\,\alpha}{1 + tg^2\alpha}$$
   Analogicznie:
   $$\cos^2\alpha = \frac{\cos^2\alpha}{1} = \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha} = \frac{1}{1 + tg^2\alpha}$$

$$sin\alpha = \frac{tg\alpha}{\sqrt{(1+tg^2\alpha)}} \qquad cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{(1+tg^2\alpha)}}$$

4. Zamień na iloczyn :

$$sin\alpha + sin\beta + sin\gamma \; gdy \; kąty \; \alpha\,,\beta,\gamma$$

Są kątami trójkąta. Wtedy: $\alpha + \beta + \gamma = 180^o$

$\gamma = 180 - (\alpha + \beta) \Rightarrow sin\gamma = \sin(\alpha + \beta)$

Wykorzystam wzór na sumę sinusów i sinus podwojonego kąta:

$$sin\alpha + sin\beta + sin\gamma =$$
$$= 2 \cdot sin\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot cos\frac{\alpha - \beta}{2} + 2 \cdot sin\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot cos\frac{\alpha + \beta}{2} =$$
$$= 2 \cdot sin\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \left(cos\frac{\alpha - \beta}{2} + cos\frac{\alpha + \beta}{2}\right) =$$
$$= 4 \cdot sin\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot cos\frac{\alpha}{2} \cdot cos\frac{\beta}{2} = 4 \cdot \sin(90^o - \frac{\gamma}{2}) \cdot cos\frac{\alpha}{2} \cdot cos\frac{\beta}{2}$$

Ostatecznie:

$$sin\alpha + sin\beta + sin\gamma = 4 \cdot cos\frac{\alpha}{2} \cdot cos\frac{\beta}{2} \cdot cos\frac{\gamma}{2}$$

5. Równania trygonometryczne.

Każde równanie trygonometryczne najlepiej doprowadzić w końcowym etapie do równania typu:

$$\sin(x) = \sin(\alpha) \Rightarrow x = \alpha + 2k\pi \lor x = (\pi - \alpha) + 2k\pi$$
$$\cos(x) = \cos(\alpha) \Rightarrow x = \alpha + 2k\pi \lor x = -\alpha + 2k\pi$$
$$tg(x) = tg(\alpha) \Rightarrow x = \alpha + k\pi$$

Wzory podane powyżej są tożsamością więc równanie trygonometryczne jest równoważne alternatywie równań algebraicznych.

Przykład: rozwiąż równie: $\sin(3x)+\cos(2x)=0$

Są dwie metody zamiana na iloczyn lub według schematu podanego powyżej.

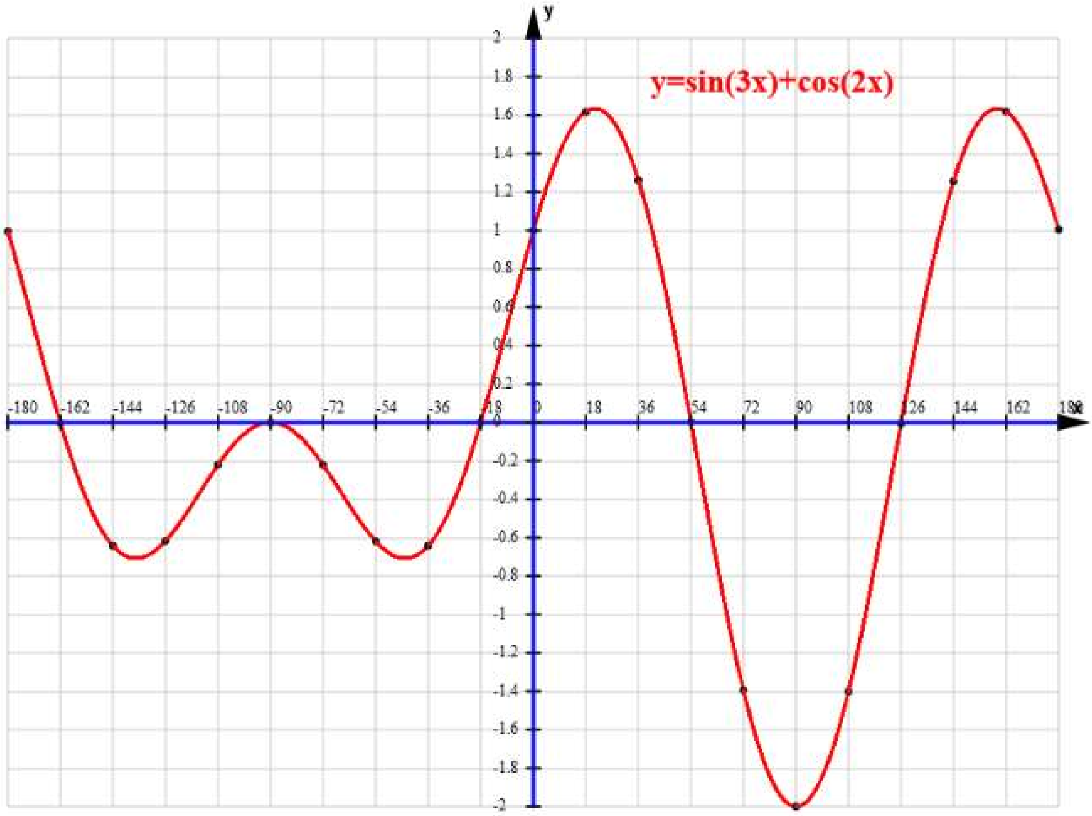
$-\sin(3x) = \cos(2x) \Rightarrow \sin(-3x) = \cos(2x) \Rightarrow$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} + 3x\right) = \cos(2x) \Rightarrow alternatywa:$

$\frac{\pi}{2} + 3x = 2x + 2k\pi \lor \frac{\pi}{2} + 3x = -2x + 2k\pi$

$x = \frac{-\pi}{2} + 2k\pi \vee 5x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$$x_1 = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \; lub \; x_2 = \frac{-\pi}{10} + \; k \cdot \frac{2\pi}{5}$$



Pokażę teraz zamianę na iloczyn:

sin(3x)+cos(2x)= $\cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) + \cos(2x) =$

$2\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{5x}{2}\right) = 0 \Rightarrow$

$\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee \left(\frac{\pi}{4} - \frac{5x}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$\frac{x}{2} = \frac{-\pi}{4} - k\pi \vee \frac{5x}{2} = \frac{-\pi}{4} - k\pi$

$$x_1 = \frac{-\pi}{2} - 2k\pi \;\; lub \;\; x_2 = \frac{-\pi}{10} - k \cdot \frac{2\pi}{5}$$

$x_1 \subset x_2$