Różne zadania na dowodzenie

Zadanie: a, b, c – liczby całkowite takie że a=b+c.

Wykazać, że $a^4 + b^4 + c^4$ *jest podójnym kwadratem*.

$a^2 = b^2 + 2bc + c^2) \Rightarrow b^2 + c^2 = a^2 - 2bc$

$a^4 + b^4 + c^4 = a^4 + (b^2 + c^2)^2 - 2b^2c^2 =$

$a^4 + a^4 - 4a^2bc + 4b^2c^2 - 2b^2c^2 =$

$2(a^4 - 2a^2bc + b^2c^2) = 2(a^2 - bc)^2$

$$\mathrm{a}^4 + \mathrm{b}^4 + \mathrm{c}^4 = 2(\mathrm{a}^2 - \mathrm{bc})^2$$

Zadanie: Wykazać, że liczba 1000….01 (299 zer) jest złożona.

$L = 10^{300} + 1 = (10^{100})^3 + 1^3$

Wystarczy teraz zastosować wzór:$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

$$L = (10^{100} + 1)(10^{200} - 10^{100} + 1)$$

Oba czynniki są różne od jeden to kończy dowód.

Zadanie: Liczba n jest sumą kwadratów trzech liczb naturalnych. Wykazać, że również n^2 jest sumą kwadratów trzech liczb naturalnych.

$n = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow n^2 = a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2a^2c^2$

$$n^2 = (a^2 - b^2 - c^2)^2 + (2ab)^2 + (2ac)^2$$

Zadanie: Wykazać , że wyrażenie:

$W = a^3(b^2 - c^2) + b^3(c^2 - a^2) + c^3(a^2 - b^2)$

jest podzielne przez : $(a-b)(b-c)(c-a)$.

$W = a^3(b^2 - c^2) + b^3c^2 - b^3a^2 + c^3a^2 - c^3b^2 =$

$a^3(b^2 - c^2) + b^2c^2(b-c) + a^2(c^3 - b^3) =$

$(b-c)[a^3(b+c) + b^2c^2 - a^2(b^2 + bc + c^2) =$

$(b-c)[a^3b + a^3c + b^2c^2 - a^2b^2 - a^2bc - a^2c^2 =$

$(b-c)[-a^2c(c-a) - a^2b(c-a) + b^2(c+a)(c-a) =$

$(b-c)(c-a)[-a^2c - a^2b + b^2c + b^2a + abc - abc] =$

$(b-c)(c-a)\left[-ab(a-b) - bc(a-b) - ac(a-b)\ \right]$=

$(a-b)(b-c)(c-a) \cdot (-ab - bc - ac)$ cbdu

Zadanie: Policz granicę ciągu:

$lim_{n\to\infty}\left[\left(\sqrt[3]{n^3+1}\ \right) - n\right]$

Należy wykorzystać : $(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

$$lim_{n\to\infty}\left[\left(\sqrt[3]{n^3+1}\ \right) - n\right] = lim_{n\to\infty}\frac{\left[\left(\sqrt[3]{n^3+1}\ \right) - n\right]}{1} =$$

$$lim_{n\to\infty}\frac{n^3 + 1 - n^3}{\sqrt[3]{(n^3+1)^2} + n \cdot \sqrt[3]{(n^3+1)} + n^2} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Wykazać równość:

$\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}=3$

Niech x=$\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}$

Policzę x^3

Zastosuję wzór:

$(a+b)^3=a^3+3ab(a+b)+b^3$

$x^3=9+\sqrt{80}+3\sqrt[3]{81-80}\cdot x+9-\sqrt{80}$

$x^3=18+3\sqrt[3]{81-80}\cdot x$

$x^3=18+3x$ jeżeli x=3 to L=P cbdu

Podobne zadanie.

Policzyć wartość wyrażenia wiadomo, że $x\in C$

$(a-b)^3=a^3-3ab(a-b)+b^3$

x=$\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$ policzę

$x^3=5\sqrt{2}+7-3\sqrt[3]{50-49}\cdot x-5\sqrt{2}+7$

$x^3=14-3\cdot x$ gdy x=2

8=14-6 L=P