Metoda równań równoważnych – na przykładzie równanie trygonometrycznego.

$$3 \cdot \cos(x) = 1 + \sin(x)$$

Z jedynki trygonometrycznej:

$\cos(x) = \sqrt{1 - \sin^2(x)}$

$3 \cdot \sqrt{1 - \sin^2(x)} = 1 + \sin(x)$ *Podnoszę stronami do kwadratu*

Tu potrzebne założenia: Prawa strona 1+sin(x) jest nieujemna wiec lewa strona równanie musi być także nieujemna tzn. $\cos(x) \geq 0$

$9(1 - \sin^2(x)) = 1 + 2\sin(x) + \sin^2(x)$

$9 - 9\sin^2(x) = 1 + 2\sin(x) + \sin^2(x)$

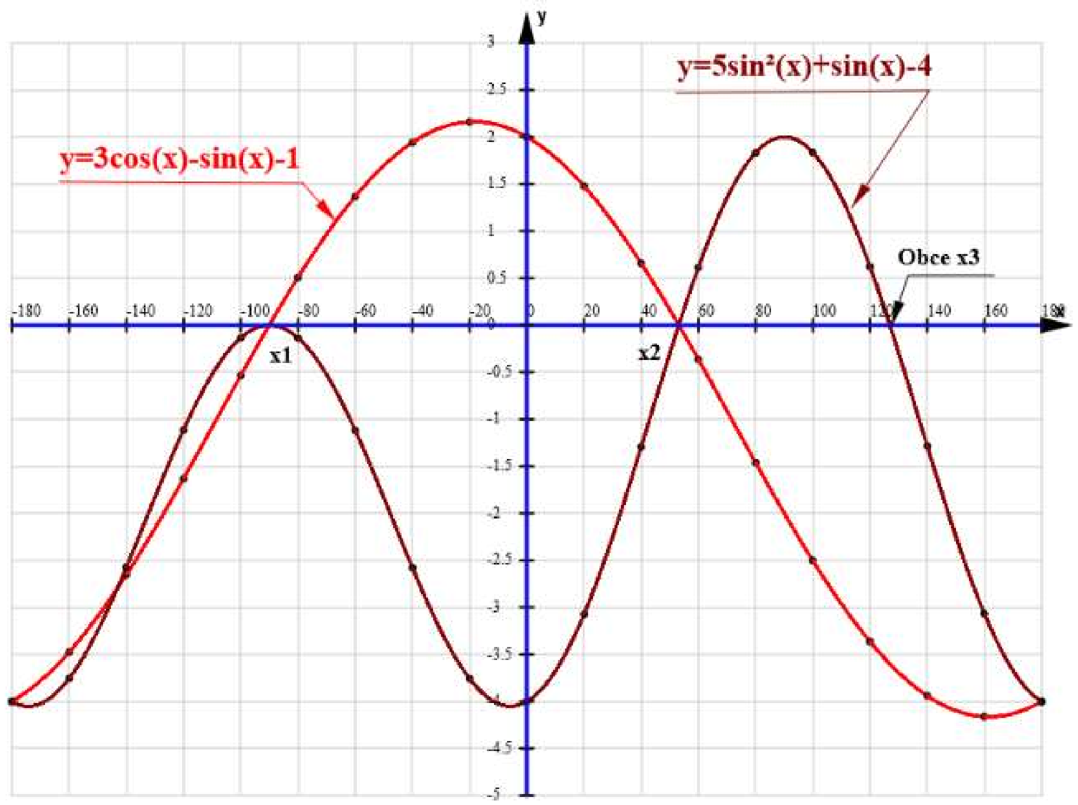
$10\sin^2(x) + 2\sin(x) - 8 = 0$

$5\sin^2(x) + \sin(x) - 4 = 0$

$\Delta = 1 + 80 = 81 \ \sqrt{\Delta} = 9$

$\sin(x_1) = \dfrac{-1 - 9}{10} = -1 \Rightarrow x_1 = -90 + k \cdot 360^o$

$\sin(x_2) = \dfrac{-1 + 9}{10} = 0{,}8 \Rightarrow x_2 = 53{,}13^o + k \cdot 360^o \ lub \ x_3 = 126{,}87^o + k \cdot 360^o$



Teraz należy sprawdzić założenia do podnoszenia do kwadratu , widać , że cos(126,87) jest ujemny wiec nie należy do dziedziny. Popatrz na powyższy wykres – funkcja po podniesieniu do kwadratu ma 3 miejsca zerowe tzn. jedno obce.

Jest inna metoda rozwiązania tego zadania, która nie wymaga podnoszenia do kwadratu tzn. nie ma problemów z pierwiastkami obcymi.

Należy funkcje sin(x) i cos(x) wyrazić przez tg(x/2)

Wyprowadzę potrzebne wzory:

$\sin(\alpha) = \sin\left(2 \cdot \frac{\alpha}{2}\right) = 2 \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2}$

$1 = \sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2}$ podzielę stronami

$\cos(\alpha) = \cos\left(2 \cdot \frac{\alpha}{2}\right) = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}$

$1 = \sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2}$ podzielę stronami

$\sin(\alpha) = \frac{2 \cdot tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$ analogicznie $\cos(\alpha) = \frac{1-tg^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1+\mathrm{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$

Wykorzystam do rozwiązania: $t = tg\frac{\alpha}{2}$

$3 \cdot \cos x = 1 + \sin x$

$3 \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2} = 1 + \frac{2t}{1+t^2}$ wymnożę przez mianownik,

$3 - 3t^2 = 1 + t^2 + 2t$

$4t^2 + 2t - 2 = 0$

$2t^2 + t - 1 = 0 \;\; \Delta = 9 \; \sqrt{\Delta} = 3$

$t_1 = \frac{-1-3}{4} = -1 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = -45^o + k \cdot 180^o \Rightarrow \alpha = -90^o + k \cdot 360^o$

$t_2 = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 26{,}56^o + k \cdot 180^o \Rightarrow \alpha = 53{,}13^o + k \cdot 360^o$

Metoda da daje tylko właściwe pierwiastki , bez pierwiastków obcych.