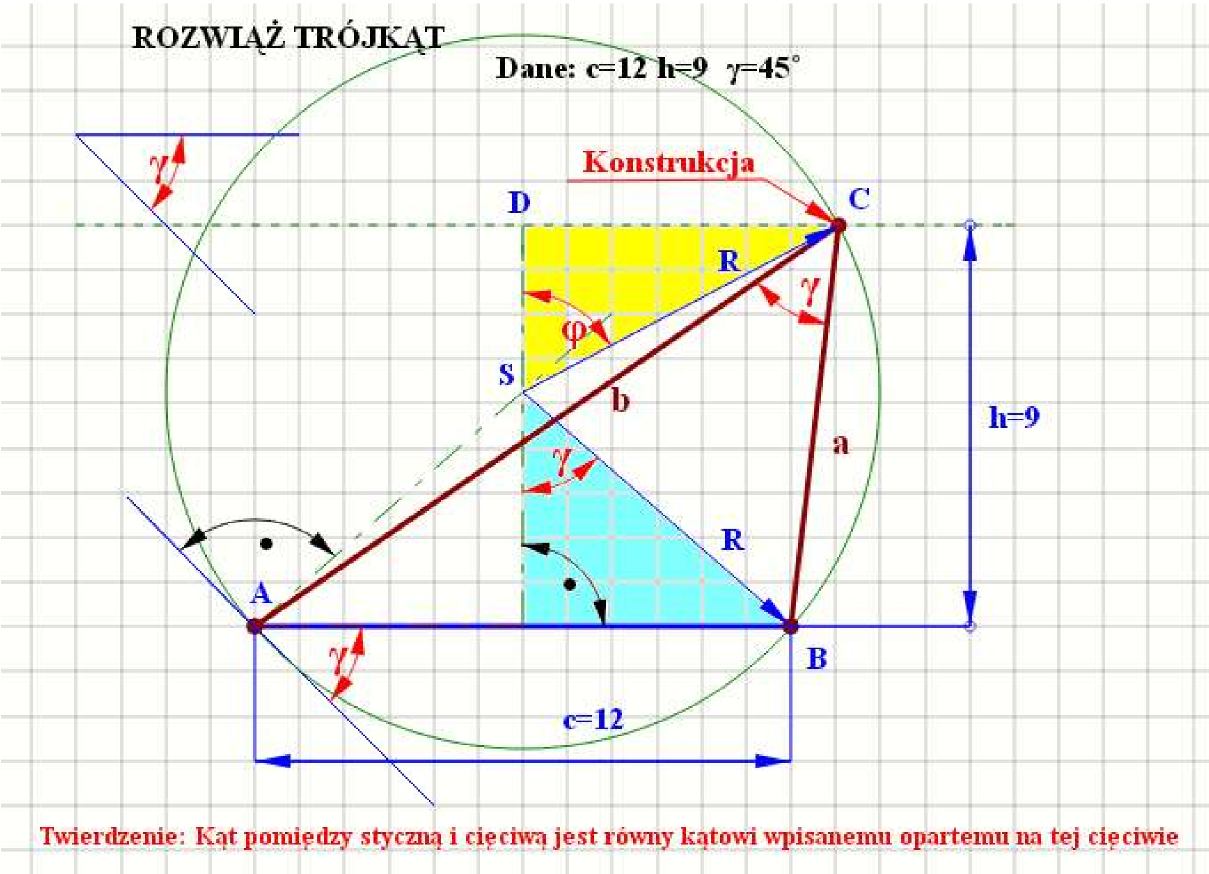
Rozwiąż trójkąt w którym znany jest bok c=12 i kąt $\gamma = 45^o$ oraz wysokość opuszczona na ten bok h=9.Pokaż jak zadanie można rozwiązać konstrukcyjnie.

W rozwiązaniu konstrukcyjnym wykorzystam twierdzenie o kacie dopisanym , które mówi: kąt pomiędzy styczną a cięciwą tkz. *kąt dopisany* jest równy kątowi wpisanemu opartemu na tej cięciwie patrz rysunek poniżej



Przy tych danych najłatwiej w pierwszej kolejności jest policzyć pole trójkąta i promień okręgu opisanego R na tym trójkącie , korzystając z twierdzenia sinusów:

$$P = \frac{c \cdot h}{2} = 54$$

$$\frac{c}{\sin(\gamma)} = 2R \Rightarrow R = \frac{c}{2 \cdot \sin(\gamma)} = 8{,}4853$$

Aby policzyć brakujące boki i kąty policzę najpierw kąt ϕ w żółtym trójkącie. Należy zauważyć , że połowa kąta wierzchołkowego w trójkącie ABS to także kąt γ , jako połowa kąta środkowego opartego na łuku na którym opiera się kąt wpisany ACB.

Można teraz policzyć wysokość h z zależności:

$$R \cdot \cos(\phi) + R \cdot \cos(\gamma) = h$$

Stąd można policzyć : $\cos(\phi) = \frac{h}{R} - \cos(\gamma) = 0{,}3536$

Policzę teraz $\sin(\phi) = \sqrt{1 - \cos^2 \phi} = \sqrt{1 - 0{,}3536^2} = 0{,}9354$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta o pionowej przyprostokątnej h

$$a^2 = R^2 \cdot (\sin(\phi) - \sin(\gamma))^2 + h^2$$
$$= 8{,}4853^2 \cdot (0{,}9354 - 0{,}7071)^2 + 9^2 = 84{,}753$$

$$a = \sqrt{84{,}753} = 9{,}2061$$

Podobnie można policzyć długość boku b

$b^2 = [R \cdot (\sin(\phi) - \sin(\gamma)) + c]^2 + h^2$=

=[8,4853(0,9354-0,7071)+12]^2 +9^2=275,247

$$b = \sqrt{275{,}247} = 16{,}5906$$

Brakujące kąty można policzyć z twierdzenia sinusów.

Inny sposób to układ równań na niewiadome a i b.

$$P = \frac{1}{2} \cdot ab \cdot sin\gamma \Rightarrow ab = \frac{2P}{sin\gamma}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot cos\gamma = a^2 + b^2 - 4P \cdot ctg\gamma$$

$$b = \frac{2P}{a \cdot sin\gamma} \Rightarrow c^2 = a^2 + \frac{4P^2}{a^2 \cdot sin^2\gamma}$$

Przyjmę nową niewiadomą $u = a^2\ wtedy$:

$$u^2 - (4P \cdot ctg\gamma + c^2) \cdot u + \frac{4P^2}{\sin^2\gamma} = 0$$

Pomocnicze zmienne:

$$u^2 + f \cdot u + g = 0$$

Gdzie:

$$f = -(4P \cdot ctg\gamma + c^2) = -360$$

$$g = \frac{4P^2}{\sin^2\gamma} = 23328$$

$$\Delta = f^2 - 4g = 36288\ \sqrt{\Delta} = 190{,}491$$

$$u_1 = \frac{-f - \sqrt{\Delta}}{2} = 84{,}753 \quad u_2 = \frac{-f + \sqrt{\Delta}}{2} = 275{,}247$$

$$a = \sqrt{u_1} = 9{,}2061$$

$$b = \sqrt{u_2} = 16{,}5906$$

Wyniki są takie same jak w pierwszej metodzie.