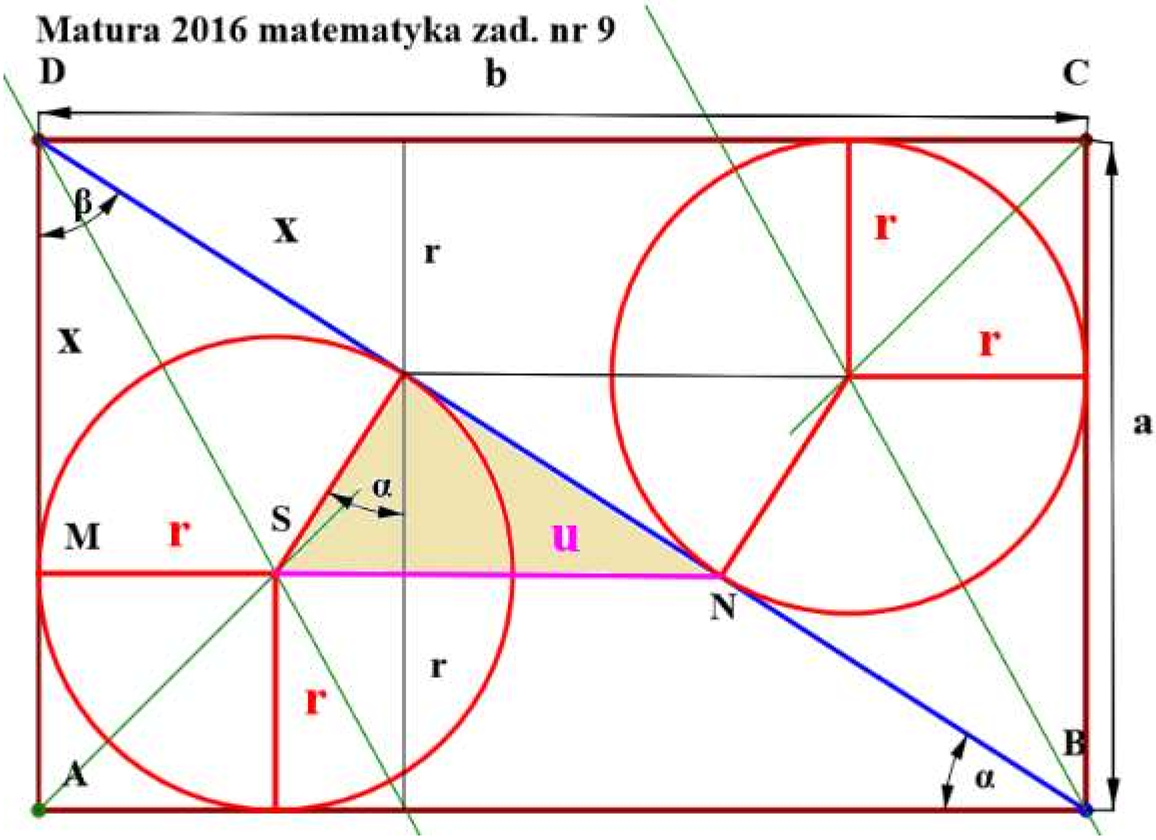
Matura 2016 zad nr 9

W prostokąt ABCD wpisano dwa okręgi tak jak pokazano na rysunku. Wykazać , że odcinek MN jest równy AD.



Rozwiązanie:

Wystarczy wykazać że odcinek x=MD jest równy u=SN

Na wstępie założę że dana jest przekątna c=BD oraz kąt alfa.

Dla tak przyjętych danych:

$$a = c \cdot sin\alpha \;\; i \;\; b = c \cdot cos\alpha$$

Policzę najpierw promień okręgu wpisanego w trójkąty:

$$r = \frac{P}{p} = \frac{c \cdot sin\alpha \cdot cos\alpha}{1 + sin\alpha + cos\alpha}$$

Policzę warunek na kąt alfa przy którym punkt styczności okręgów z przekątna jest na wysokości r tzn. w punkcie N.

$$2r + r \cdot cos\alpha = c \cdot sin\alpha$$

$$(2 + cos\alpha) \cdot r = c \cdot \sin\alpha \Rightarrow$$

$$\frac{(2 + cos\alpha\ )\ cos\alpha}{1\ + sin\alpha + cos} = 1 \Rightarrow \cos\alpha = \sin\alpha + \sin^2\alpha$$

$$x = c \cdot \sin\alpha - r = c \cdot sin\alpha - \frac{c \cdot sin\alpha \cdot cos\alpha}{1 + sin\alpha + cos\alpha}$$

$$x = c\frac{\sin\alpha + \sin^2\alpha}{1 + sin\alpha + \cos\alpha}$$

Z kolorowego trójkąta policzę teraz szukany odcinek u=|SN|

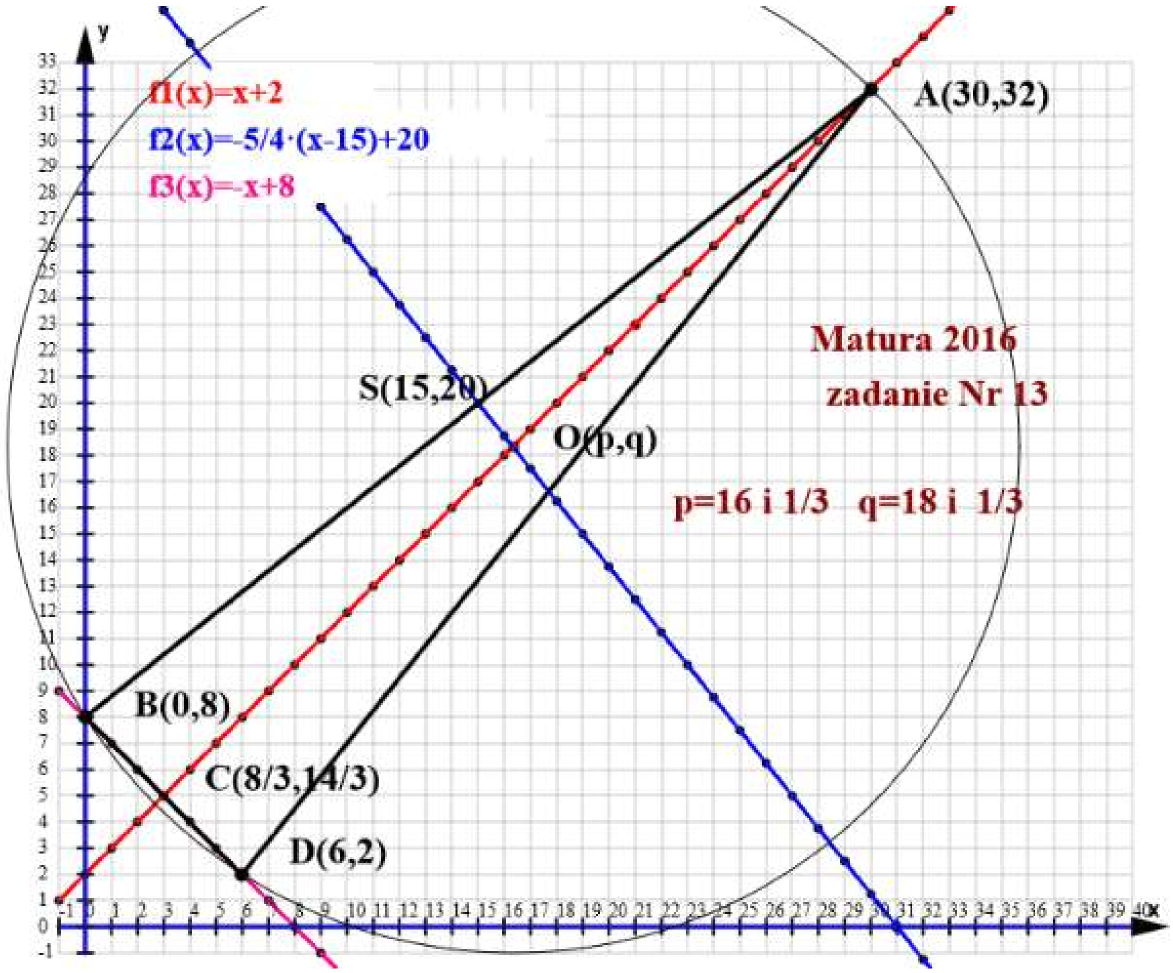
$$u = \frac{r}{\sin\alpha} = \frac{c \cdot cos\alpha}{1 + sin\alpha + cos\alpha}$$

Jeżeli w miejsce $\cos\alpha$ podstawimy wyżej wymieniony warunek to:

$$u = c\frac{\sin\ \alpha + \sin^2\alpha}{1 + sin\alpha + cos\alpha} \Rightarrow u = x$$

To kończy dowód.

Punkty A(30,32) i B(0,8) są sąsiednimi wierzchołkami czworokąta ABCD wpisanego w okrąg. Prosta o równaniu x-y+2=0 jest jedyna osią symetrii i zawiera przekątną AC. Oblicz współrzędne wierzchołków C i D tego czworokąta.



Środek okręgu musi leżeć na osi symetrii AC i na symetralnej danego boku BC, w tym celu policzę współrzędne punktu S i współczynnik kierunkowy prostej AB.

$$x_S = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{30}{2} = 15 \quad y_S = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{40}{2} = 20$$

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{24}{30} = \frac{4}{5} \Rightarrow m_{SO} = -\frac{5}{4}$$

Równanie prostej SO: $y = -\frac{5}{4}(x - 15) + 20$

Po rozwiązaniu układu z prostą: $y = x + 2$ otrzymamy współrzędne środka okręgu $p = 16\frac{1}{3}$ $\quad q = p + 2 = 18\frac{1}{3}$

Policzę teraz współrzędne punktu C wykorzystując punk O jako środek odcinka AC.

$$\frac{x_C + 30}{2} = 16\frac{1}{3} \Rightarrow x_C = 2\frac{2}{3}$$

$$\frac{y + 32}{2} = 18\frac{1}{3} \Rightarrow y_C = 4\frac{2}{3}$$

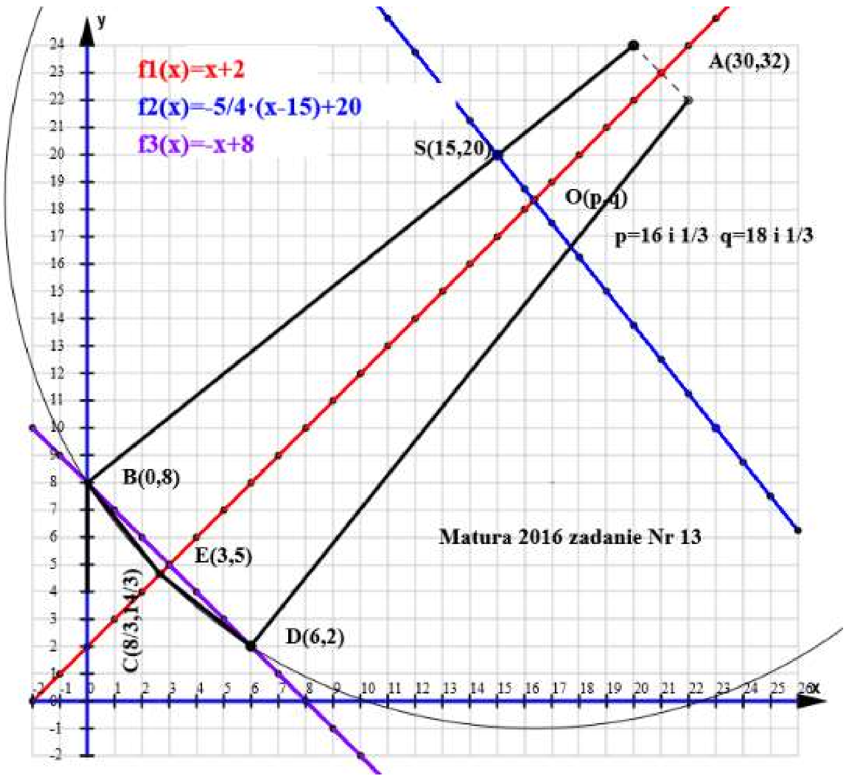
Aby policzyć współrzędne punktu B napiszę równanie prostej prostopadłej do AC przez punkt B(0,8) i rozwiążę układ z AC

$$y = -x + 8 \;\; i \;\; y = x + 2$$

Punkt przecięcia E(3,5) jest środkiem BD

$$\frac{x_D + 0}{2} = 3 \Rightarrow x_D = 6 \quad \frac{y_D + 8}{2} = 5 \Rightarrow y_D = 2$$

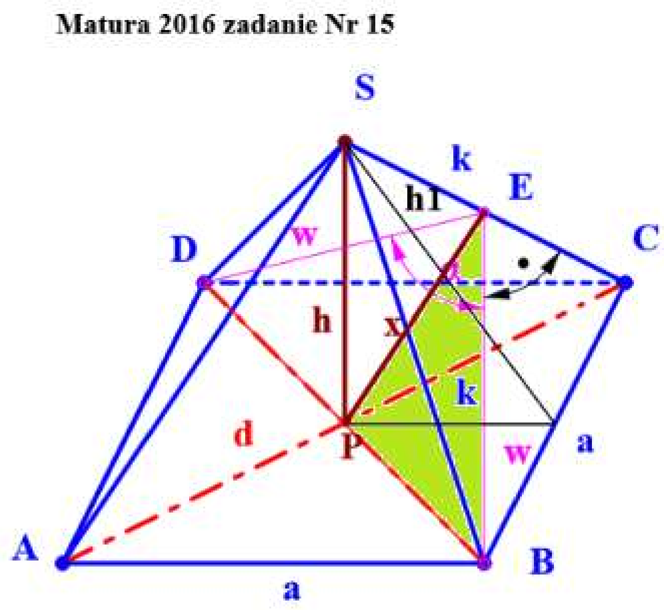
Odpowiedź: $C\left(2\frac{2}{3}, 4\frac{2}{3}\right)$ $D(6,2)$



Matura 2016 zad nr 15

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym ABCDS o podstawie ABDC wysokość jest równa 5, a kąt miedzy sąsiednimi ścianami bocznymi ostrosłupa ma miarę 120^o.

Oblicz objętość tego ostrosłupa.



Z trójkąta PBE policzę wysokość x trójkąta BDE

$$tg\frac{\alpha}{2} = \frac{d}{2x} = \sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{d}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{6}d\sqrt{3}$$

Policzę pole trójkąta CPS na dwa sposoby wtedy:

$$k \cdot x = \frac{d}{2} \cdot h \Rightarrow \frac{k\sqrt{3}}{3} = h \Rightarrow k = \frac{3h}{\sqrt{3}}$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta CPS

$$k^2 = \frac{d^2}{4} + h^2 \Rightarrow 3h^2 = \frac{a^2}{2} + h^2 \Rightarrow a^2 = 4 \cdot h^2$$

$$V = \frac{1}{3}a^2h = \frac{4}{3}h^3 = \frac{700}{3} = 233\frac{1}{3}$$