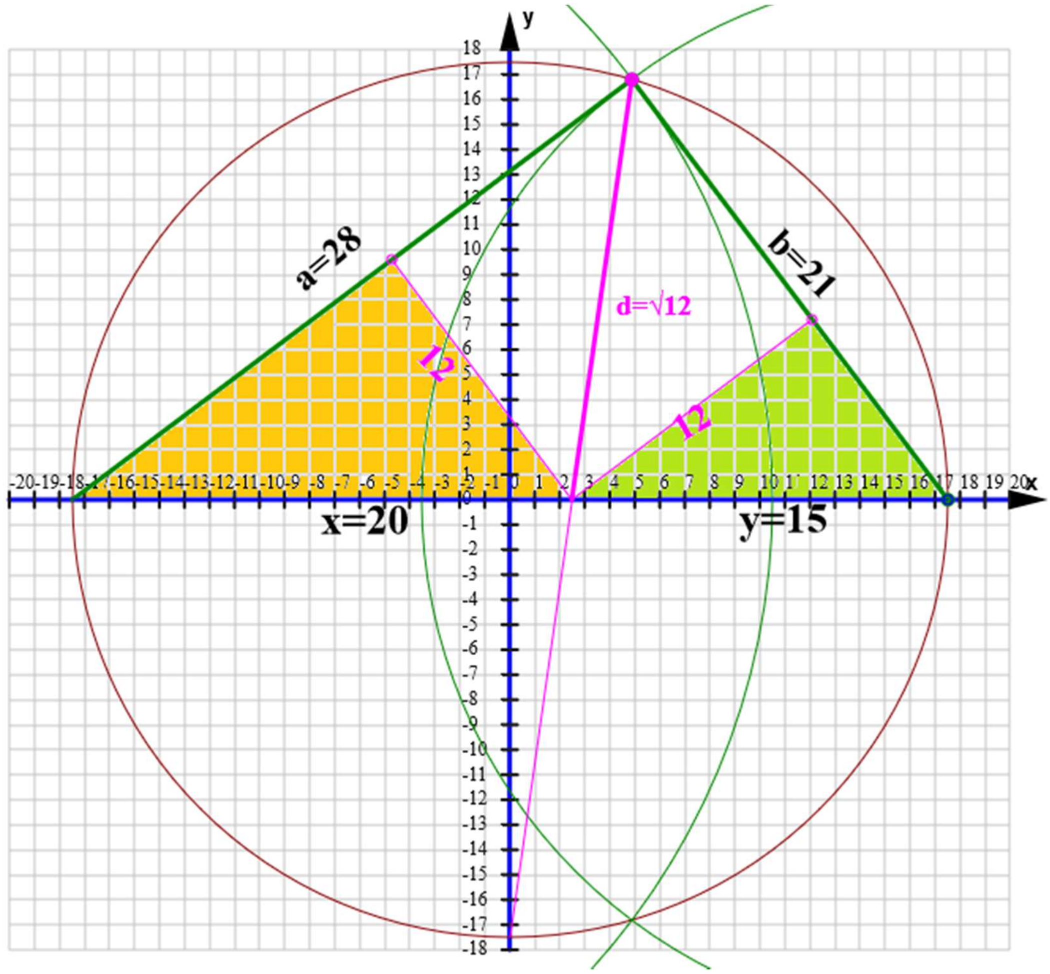
Jak policzyć długości przyprostokątnych, gdy jest podana przeciwprostokątna i długość dwusiecznej kąta prostego?

DANE:

$c = 35$

$d = \sqrt{12}$

Oblicz a,b.



Zamiast korzystać z długości dwusiecznej $d = \sqrt{12}$ wpiszę kwadrat o boku 12 w trójkąt prostokątny tak jak pokazano na powyższym rysunku. Łatwo wykazać że kolorowe trójkąty są wzajemnie podobne i są podobne do dużego trójkąta.

$$(a-12)^2 + 12^2 = x^2$$

$$(b-12)^2 + 12^2 = y^2$$

Podzielę stronami i wykorzystam twierdzenie o dwusiecznej kąta.

$$\frac{(a-12)^2+12^2}{(b-12)^2+12^2}=\frac{a^2}{b^2}$$

Po wymnożeniu:

$$b^2\cdot(a^2-24a+144)+144b^2=a^2\cdot(b^2-24b+144)+144a^2$$

Po redukcji:

$$-24ab^2+288b^2=-24a^2b+288a^2b$$

$$24ab(a-b)=288(a^2-b^2)$$

$$24ab=288(a+b)$$

$$ab=12(a+b)\Rightarrow 2ab=24(a+b)$$

Z twierdzenia Pitagorasa:

$$a^2+b^2=35^2$$

Po dodaniu stronami otrzymamy:

$$(a+b)^2=24(a+b)+35^2$$

Przyjmę nową niewiadomą $u=a+b$

$$wtety: u^2-24u-1115=0$$

$$\Delta=576+4900=5476\Rightarrow\sqrt{5476}=74$$

$$a+b=\frac{24+74}{2}=\frac{98}{2}=49$$

$$b=49-a\Rightarrow b^2=2401-98a+a^2$$

Podstawiam do twierdzenia Pitagorasa:

$$2a^2-98a+2401=1225\Rightarrow a^2-49a+588=0$$

$$\Delta=2401-2352=49\Rightarrow\ \sqrt{49}=7$$

$$a_1=\frac{49-7}{2}=21\ \ a_2=\frac{49+7}{2}=28$$

$$b_1=49-21=28\quad b_2=49-28=21$$

ODP. Przyprostokątne tego trójkąta a=21 i b=28

Inny sposób który prowadzi to tego samego wyniku to policzenie odcinków x i y z twierdzenia Carnota [cosinusów] dla kąta 45 stopni.

$$x^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cdot cos45^o = a^2 + 288 - 24a$$

Analogicznie:

$$y^2 = b^2 + d^2 - 2bd \cdot cos45^o = b^2 + 288 - 24b$$

Po podzieleniu stronami i wykorzystaniu twierdzenia o dwusiecznej kąta otrzymamy jak poprzednio: $ab = 12(a + b)$